Formulario di Dinamica dei Sistemi Rigidi

Grandezze e unità di misura

- m - massa [kg]
- $\vec{r}$ - vettore posizione [m]
- I - momento d'inerzia rispetto a un asse [kg m^2]
- ω - velocità angolare [rad/s]
- α - accelerazione angolare [rad/s^2]
- $\vec{L}$ - momento angolare [kg m^2/s]
- $\vec{M}$ - momento risultante (coppia) [N m]
- E_k - energia cinetica [J]
- v_{CM} - velocità del centro di massa [m/s]
- R - distanza fra assi paralleli (Huygens–Steiner) [m]

Centro di massa e baricentro

Centro di massa (sistema discreto):

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \qquad M = \sum_i m_i.$$

Centro di massa (distribuzione continua):

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\, dm = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\,\rho(\vec{r})\, dV.$$

Nota: il *baricentro* coincide col centro di massa se la densità è uniforme; per corpi non omogenei si parla più propriamente di centro di massa.

Momento d'inerzia

Definizione (asse dato):

$$I = \sum_i m_i r_{i,\perp}^2 \quad \text{(discreto)}, \qquad I = \int_V r_\perp^2\, dm \quad \text{(continuo)},$$

dove $r_\perp$ è la distanza dell'elemento di massa dall'asse.

Tensore d'inerzia (3D)

$$I_{ij} = \int_V \left(r^2\delta_{ij} - x_i x_j\right)\, dm, \qquad i,j \in \{x,y,z\}.$$

Teorema di Huygens-Steiner (assi paralleli)

Sia I_{CM} il momento d'inerzia rispetto a un asse che passa per il centro di massa e I_O il momento rispetto a un asse parallelo distante d:

$$\boxed{I_O = I_{CM} + Md^2}$$

con M massa totale [kg], d distanza tra assi [m]. Formula inversa:

$$d = \sqrt{\frac{I_O - I_{CM}}{M}}.$$

Momenti d'inerzia utili (memo)

Asta sottile (centro)	$I = \frac{1}{12}mL^2$
Asta sottile (estremo)	$I = \frac{1}{3}mL^2$
Anello sottile raggio R	$I = mR^2$
Cilindro solido (asse longitud.)	$I = \frac{1}{2}mR^2$
Sfera solida (asse centrale)	$I = \frac{2}{5}mR^2$
Sfera cava (asse centrale)	$I = \frac{2}{3}mR^2$

Momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad \text{(particella)}$$

Per un corpo rigido rotante attorno a un asse principale:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Leggi di Eulero (teoremi fondamentali)

Prima legge (traslazione del CM):

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{CM}.$$

Seconda legge (rotazione attorno a un asse fisso o al CM) - forma vettoriale:

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Seconda legge - forma scalare (asse fisso):

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\,\alpha.$$

Per rotazioni 3D generali (equazioni di Eulero con tensore):

$$\mathbf{I}\,\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\mathbf{I}\,\vec{\omega}) = \vec{M}_{\text{ext}}.$$

Energia cinetica (rigido)

Energia totale = traslazione del CM + rotazione attorno al CM:

$$E_k = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2.$$

Coppia (momento torcente)

Definizione:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad \tau = rF \sin\phi,$$

dove ϕ è l'angolo tra $\vec{r}$ e $\vec{F}$. Unità: N m.

Lavoro infinitesimo di una coppia per rotazione angolare $d\theta$:

$$dL = \tau\, d\theta.$$

Potenza istantanea:

$$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}.$$

Formule inverse utili

$$\alpha = \frac{\sum \tau}{I}, \qquad I = \frac{\sum \tau}{\alpha}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{2\left(E_k - \frac{1}{2} M v_{CM}^2\right)}{I_{CM}}}.$$

Consigli pratici

- Per problemi composti: (1) trovare CM e M, (2) scegliere asse conveniente, (3) calcolare I_{CM} e applicare Huygens–Steiner se serve.
- Usare il tensore d'inerzia solo se la rotazione è 3D e non è attorno a un asse principale.
- Verificare sempre unità (kg, m, s) e segni delle coppie.