Formulario su Gravitazione Universale e Dinamica Orbitale

Definizione delle grandezze e unità di misura

- m_1, m_2: masse dei corpi [kg]
- M: massa del corpo centrale (es. pianeta o stella) [kg]
- m: massa del corpo in orbita [kg]
- r: distanza tra i centri dei due corpi [m]
- G: costante di gravitazione universale $G = 6.67430 \times 10^{-11}$ [N·m^2/kg^2]
- $\vec{F}_g$: forza gravitazionale [N]
- v: velocità orbitale [m/s]
- v_f: velocità di fuga [m/s]
- T: periodo orbitale [s]
- R: raggio di un pianeta o stella [m]
- g: accelerazione di gravità alla superficie di un pianeta [m/s^2]
- ϵ: energia meccanica specifica (per unità di massa) [J/kg]
- E_c: energia cinetica [J]
- E_p: energia potenziale gravitazionale [J]
- a: semiasse maggiore di un'orbita ellittica [m]
- e: eccentricità dell'orbita (adimensionale)

Leggi di Keplero

Prima legge (orbite ellittiche): I pianeti descrivono orbite ellittiche con il Sole in uno dei fuochi.

Seconda legge (aree uguali in tempi uguali): Il raggio vettore che unisce il pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali:

$$\frac{dA}{dt} = \text{costante}$$

Terza legge (periodo e semiasse maggiore):

$$T^2 \propto a^3$$

Per orbite circolari intorno a una massa M:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Legge di gravitazione universale

Forma vettoriale:

$$\vec{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

dove $\hat{r}$ è il versore dal corpo centrale al corpo in orbita.

Modulo (forma scalare):

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Accelerazione gravitazionale

$$g(r) = \frac{GM}{r^2}$$

Alla superficie del pianeta ($r = R$):

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Energia potenziale gravitazionale

$$E_p(r) = -G\frac{mM}{r}$$

Moto circolare uniforme in orbita

Equilibrio tra forza centripeta e gravitazionale:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$

Velocità orbitale:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Periodo orbitale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Energia meccanica totale:

$$E_{\text{tot}} = E_c + E_p = -\frac{GMm}{2r}$$

Energia specifica:

$$\epsilon = -\frac{GM}{2r}$$

Velocità di fuga

Energia cinetica necessaria per portare il corpo da r a infinito:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

Quindi:

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Alla superficie di un pianeta:

$$v_f = \sqrt{2gR}$$

Problemi tipici di dinamica orbitale

Altezze orbitali

Dato T, trovare r:

$$r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Passaggio da velocità di fuga a velocità orbitale

Per orbita circolare:

$$v_f = \sqrt{2}\, v$$

Relazioni inverse utili

Da g e R alla massa del pianeta:

$$M = \frac{gR^2}{G}$$

Da T e r a M:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$