Formulario di Vettori

Definizioni Base

- Vettore: entità con modulo, direzione e verso.
- $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$
- Modulo: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
- Componenti in termini di seno e coseno:

$$v_x = |\vec{v}| \cos\theta, \quad v_y = |\vec{v}| \sin\theta$$

dove θ è l'angolo tra $\vec{v}$ e l'asse x.
Se θ è l'angolo con l'asse y:

$$v_x = |\vec{v}| \sin\theta, \quad v_y = |\vec{v}| \cos\theta$$

- Definizione della tangente in funzione delle componenti del vettore:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

- Vettore nullo: $\vec{0} = (0, 0, 0)$

Operazioni con i Vettori

- Somma:
$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$
- Differenza:
$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x,\ a_y - b_y,\ a_z - b_z)$
- Moltiplicazione per uno scalare:
$k\vec{a} = (ka_x,\ ka_y,\ ka_z)$

Prodotto Scalare

- Definizione: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$
- Calcolo tramite componenti:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Prodotto Vettoriale

- Definizione: $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n}$
- Calcolo tramite determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} \\ &-(a_x b_z - a_z b_x)\hat{j} \\ &+(a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} \end{aligned}$$

Versori e Componenti Perpendicolari

- Versore: $\hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
- Componenti perpendicolari: proiezione di $\vec{v}$ su direzioni perpendicolari tra loro.

Proiezione

- Scalare: $\text{proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$
- Vettoriale: $\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$

Angolo tra Vettori

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \quad \sin\theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Coordinate Cartesiane e Polari

- Cartesiane: $\vec{v} = (v_x, v_y)$
- Polari: $\vec{v} = (r, \theta)$ con

$$v_x = r\cos\theta, \quad v_y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Coordinate Cilindriche

- Coordinate: (ρ, θ, z)
- Relazioni con coordinate cartesiane:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = z$$

- Modulo del vettore: $|\vec{v}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

Condizioni di Parallelismo e Perpendicolarità

- Vettori perpendicolari:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$$

- Vettori paralleli:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$$